Leçon 182 - Applications des nombres complexes à la géométrie.

Cadre :

1. Géométrie euclidienne du plan. —

1. Modélisation du plan par $\mathbb{C}$. —

- Def : On représente le plan euclidien $E = \mathbb{R}^2$ par $\mathbb{C}$ via l'application $(x,y) \mapsto x+iy$.
- Pro : L'affice du point $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est $z_M = x+iy \in \mathbb{C}$.
- Pro : Pour $M, M' \in \mathbb{R}^2$, on a $\overline{z_M} z_{M'} =< \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'} > +idet(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.
- Pro : On a $< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} >= Re[\overline{z_B - z_A}(z_D - z_C)]$.
- Pro : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ ssi $\overline{z_B - z_A}(z_D - z_C) \in i\mathbb{R}$.
  $\overrightarrow{AB}$ parallèle à $\overrightarrow{CD}$ ssi $\overline{z_B - z_A}(z_D - z_C) \in \mathbb{R}$.
- App : Equation de droite passant par A et B : $\{z \text{ tq } \overline{z_B - z_A}(z - z_A) \in \mathbb{R}\}$.
  Equation de cercle de rayon $r > 0$ et de centre A : $\{z \text{ tq } |z - z_A| = r\}$.
- Pro : $Aire(ABC) = \frac{1}{4i}[(z_A + z_B)\overline{z_C} + (z_B - z_C)\overline{z_A} + (z_C - z_A)\overline{z_B}]$
- Def : La fonction exponentielle $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par la somme de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ de rayon de convergence infini.
- Pro : $exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.
  $Re(e^{it}) = cos(t)$, et $Im(e^{it}) = sin(t)$. On peut définir les fonctions sinus et cosinus de cette façon.
  On a un isomorphisme de groupes $t \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \mapsto e^{it} \in \mathbb{U}$.
- App : Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\exists!(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tq $z = r.e^{i\theta}$.
  θ est alors appelé l'argument de z.
- App : Un triangle ABC de sommets d'affixes a,b,c est équilatéral ssi $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$.
- App : Les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un n-gone régulier.
- App : Théorème de l'angle inscrit : Soit Γ un cercle de centre O, et A,B,M trois points distincs sur le cercle. Alors $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \bmod(2\pi)$.

2. Transformations du plan. —

- Def : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une isométrie du plan ssi elle préserve les distances : $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$.
- Propriété sur les isométries.
- Ex : Les translations sont des isométries. Les réflexions de droite Δ sont des isométries. Les rotations d'angle θ autour d'un point sont des isométries.
- Pro : Les isométries sont bijectives.
- Def : Le groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$.
- Pro : $O_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{U}$.
- Pro : Caractérisation des isométries.
- Pro : La forme analytique des isométries est donc $z \mapsto e^{i\theta}z + b$ ou $z \mapsto e^{i\theta}\overline{z} + b$.
- Def : Une similitude est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.
- Pro : Les similitudes sont bijectives.
- Def : Similitudes directes, similitudes indirectes.
- Def : Centre d'une similitude.
- Propriétés sur les similitudes.
- Pro : La forme analytique des similitudes est donc $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$.
- Définition analytique d'une inversion. Définition géométrique d'une inversion.
- Pro : Les droites et cercles sont envoyés sur des droites et cercles par une inversion.
- Théorème de Ptolémée : Un quadrilatère convexe ABCD possède un cercle circonscrit si et seulement si $\|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{CD}\| + \|\overrightarrow{BC}\|.\|\overrightarrow{AD}\|$.

3. Barycentres. —

- Def : Le barycentre d'une famille de points pondérés (A_i, λ_i) telle que $\lambda_1 + \dot{+} \lambda_d \neq 0$. est l'unique point G tel que $(\sum_i \lambda_i) z_G = \sum_i \lambda_i z_{A_i}$.
- Def : Un point G est une combinaison convexe d'une famille de points (A_i) s'il est le barycentre des $(A_i)_i$ pour des poids $(\lambda_i)_i$ tous positifs.
- Théorème de Gauss-Lucas : Pour P un polynôme à coefficients complexes, les racines de P' sont des combinaisons convexes des racines de P.

2. Droite projective. —

1. Construction de $P_1(\mathbb{C})$. —

- Def : La relation $xRy \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{C}$ tq $x = \lambda y$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$.
  On définit $P_1(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\})/R$.
- Rem : $P_1(\mathbb{C})$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{C}$, que l'on peut munir de la topologie quotient.
- Pour la topologie quotient, on a $P_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
- Pro : La projection stéréographique permet d'obtenir un homéomorphisme entre $P_1(\mathbb{C})$ et la sphère unité S_2.

2. Action des homographies sur $P_1(\mathbb{C})$. —

- Def : Une homographie est une fonction f de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc = 1$. Elle est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tq $cz + d \neq 0$.
- Pro : Les homographies s'étendent à $P_1(\mathbb{C})$ par : Si $c = 0$, $f(\infty) = \infty$. Si $c \neq 0$, $f(\infty) = \frac{a}{c}$ et $f(\frac{-d}{c}) = \infty$.
- Pro : Les homographies sont des bijections sur $P_1(\mathbb{C})$.
- Ex : Les similitudes directes sont des homographies. (dont les translations, rotations, homothéries)
- Ex : L'inversion est une homographie.
- Pro : La composée d'homographies est une homographie, l'inverse d'une homographie est une homographie. On note alors $PGl_2(\mathbb{C})$ le groupe des homographies.
- Pro : $PGl_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et la fonction inverse.

– Pro : Les homographies sont 3-transitives : pour tous 3-uplets de points distincts $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2)$ dans $P_1(\mathbb{C})$, il existe une unique homographie f telle que $f(u_1) = u_2$,$f(v_1) = v_2$,$f(w_1) = w_2$.
– Rem : On a ainsi une unique homographie envoyant u sur 0, v sur 1, w sur ∞.
– Def : Pour a,b,c,d $\in P_1(\mathbb{C})$ distincts, on définit le birapport $[a, b, c, d] := f(d)$, où f est l'homographie envoyant (a, b, c) sur $(0, 1, \infty)$.
– Pro : $[a, b, c, d] = \frac{d-a}{d-c} \cdot \frac{b-c}{b-a}$
– Ex : $[1, i, -i, -1] = 2$.
– Thm : Soit f une bijection de $P_1(\mathbb{C})$. f est une homographie ssi f préserve les birapports.
– Pro : 4 points de $P_1(\mathbb{C})$ sont cocycliques ou alignés ssi leur birapport est réel.
– **Dev** : Les homographies engendrées par les éléments de $Sl_2(\mathbb{Z})$ préservent le demi-plan de Poincaré $H := \{Im(z) > 0\}$. Pour $D := \{z \in H \text{ tq } |z| \geq 1, |Re(z)| < \frac{1}{2}\}$, S :=et T :=, on a les propriétés suivantes :
i) L'orbite de tout élément de H par $< S, T >$ rencontre D.
ii) Si $z \in \overset{\circ}{D}$ et $\gamma \in Sl_2(\mathbb{Z})$, $\gamma z \in D$ ssi $\gamma = \pm I_2$.
iii) $Sl_2(\mathbb{Z}) =< S, T >$.

3. Utilisation des quaternions en géométrie. —

– Def : L'algèbre $\mathbb{H}$.
– Def : Conjugué d'un quaternion, l'application $N(z) := z\overline{z}$.
– Pro : Pour l'isomorphisme d'ev $z = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mapsto (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a $N(z) = \|(a, b, d, c)\|_2^2$.
Donc $z \mapsto \sqrt{N(z)}$ est une norme sur $\mathbb{H}$.
– Pro : $N(zz') = N(z)N(z')$.
– Pro : $\mathbb{H}$ est une algèbre à division.
– App : Pour G le groupe des quaternions de norme 1 et $SU_2(\mathbb{C})$ le groupe des automorphismes unitaires de $\mathbb{C}^2$, on a $SU_2(\mathbb{C}) \simeq G$.
Ceci fait l'analogue avec l'isomorphisme de groupes existant entre $SO2(\mathbb{R})$ et $\{z \in \mathbb{C}tq|z| = 1\}$.
– **Dev** : Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.
– Rem : Cet isomorphisme, permet de ramener le calcul de l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par une rotation à des produits dans $\mathbb{H}$ en identifiant les vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ du repère orthonormé canonique de $\mathbb{R}^3$ aux éléments i,j,k de $\mathbb{H}$.

Références

Eiden : Modélisation de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{C}$, affixe, équations. Coordonnées polaires. Inversion analytique.
Audin : Transformations du plan, isométries, similitudes, inversions. Construction de $P_1(\mathbb{C})$. Homographies.
Nourdin : Exponentielle complexe.
Tauvel (Géométrie) : Barycentres, Th de Gauss-Lucas.
Gozard : Constructibilité à la règle et au compas.
Caldero, Germoni : Construction de $P_1(\mathbb{C})$. Homographies. Quaternions, $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions.(Dev) Alessandrini : Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré.(Dev)

May 19, 2017
Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes